Universidade Federal de Pelotas
Programa de Pós-Graduação em Computação
Teoria da Computação

Autores: Matheus de Luna Dobke, Patrícia Teixeira Davet e Thiago Ferreira Pontes.

Exercícios Recorrências

Determine um limite assintótico para as seguintes recorrências, utilizando o método indicado.

MÉTODO DA ÁRVORE DE RECURSÃO

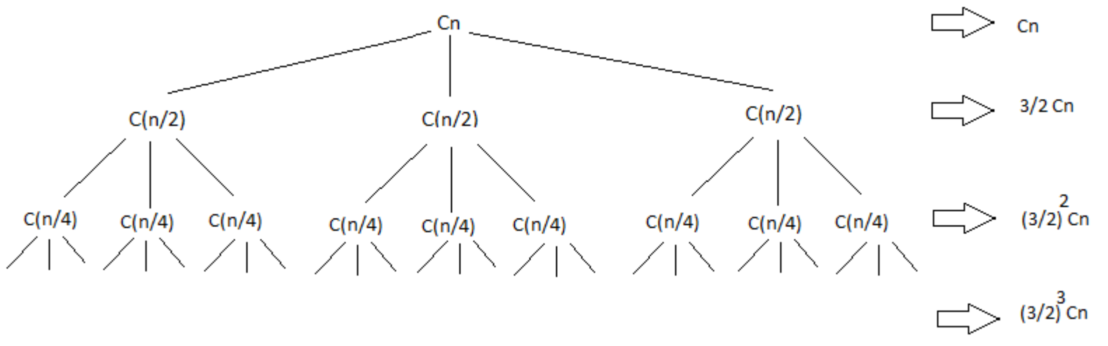
a) $\begin{cases} T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + cn \\ T(1) = 1 \end{cases}$

Resolução:

T($\frac{n}{2}$) = 3 T($\frac{n}{4}$) + C. ($\frac{n}{2}$)

T($\frac{n}{4}$) = 3 T($\frac{n}{8}$) + C. ($\frac{n}{4}$)

T($\frac{n}{8}$) = 3 T($\frac{n}{16}$) + C. ($\frac{n}{8}$)



....
....
....
11111 111111 111111 111111 11111 1111 111111 111111 111111 → 3^h nodos

Generalizando o custo será: $\left(\frac{3}{2}\right)^i$. Cn

A altura da árvore é $\frac{n}{2^h}$ = 1 → n= 2^h → h= lgn

Custo do último nível: 3^h nodos → $3^{\lg n}$ = $n^{\lg 3}$

T(n)=$\left(\frac{3}{2}\right)^0$. Cn + $\left(\frac{3}{2}\right)^1$. Cn + $\left(\frac{3}{2}\right)^2$. Cn + $\left(\frac{3}{2}\right)^3$. Cn + ... + $\left(\frac{3}{2}\right)^{h-1}$. Cn + $n^{\lg 3}$

T(n) = $n^{\lg 3}$+ $\sum_{i=0}^{h-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i$ Cn

T(n) = $n^{\lg 3}$+ Cn $\sum_{i=0}^{\lg n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i$

T(n) = $n^{\lg 3}$+ Cn $\left(\frac{1\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n}-1\right)}{\frac{3}{2}-1}\right)$

T(n) = $n^{\lg 3}$ + Cn $\left(\frac{\frac{3^{\lg n}}{2^{\lg n}}-1}{\frac{1}{2}}\right)$

T(n) $n^{\lg 3}$ + Cn $\left(\frac{\frac{n^{\lg 3}}{n^{\lg 2}}-1}{\frac{1}{2}}\right)$

T(n) = $n^{\lg 3}$ + 2.Cn $\left(\frac{n^{\lg 3}}{n}-1\right)$

T(n) = $n^{\lg 3}$ + 2. C $n^{\lg 3}$ – 2. Cn

T(n) = $\Theta\left(n^{\lg 3}\right)$

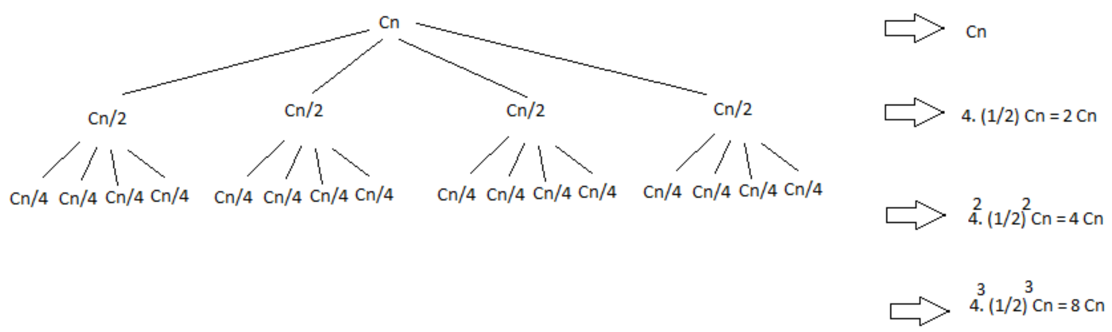
b) $\begin{cases} T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + cn \\ T(1) = 1 \end{cases}$

Resolução:

T$\left(\frac{n}{2}\right)$ = 4T$\left(\frac{n}{4}\right)$ + C$\left(\frac{n}{2}\right)$

T$\left(\frac{n}{4}\right)$ = 4T$\left(\frac{n}{8}\right)$ + C$\left(\frac{n}{4}\right)$

T$\left(\frac{n}{8}\right)$ = 4T$\left(\frac{n}{16}\right)$ + C$\left(\frac{n}{8}\right)$



....
....
....

11111...111111...11111... 11111... 11111...111111...111111...111111 → 4^h nodos

Generalizando o custo será: $(2)^i$. Cn
A altura da árvore é $\frac{n}{2^h}$ = 1 → n= 2^h → h= lgn

Custo do último nível: 4^h nodos → $4^{\lg n}$ = $n^{\lg 4}$ = n^2

T(n) = 2^0 Cn + 2^1 Cn + 2^2 Cn +2^3 Cn +... + 2^{h-1} Cn +n^2

T(n) = n^2 + Cn $\sum_{i=0}^{h-1} 2^i$

T(n) = n^2 + Cn $\left(\frac{1(2^{\lg n} - 1)}{2-1}\right)$

T(n) = n^2 + Cn $\left(n^{\lg 2} - 1\right)$

T(n) = n^2 + Cn $(n-1)$

T(n) = n^2 + Cn^2 - Cn

T(n) = $\Theta(n^2)$

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

c) $\begin{cases} T(n) = T(n-1) + cn \\ T(1) = 1 \end{cases}$

Resolução:

T(n) = T(n-1) + Cn
T(n-1) = T(n-2) + C (n-1)
T(n-2) = T(n-3) + C (n-2)
T(n-3) = T(n-4) + C (n-3)
T(n-(x-1)) = T(n-x) + C (n-x+1)
T(n-x) = 1

n-x = 1 → x = n-1

T(n) = 1 + $\sum_{i=0}^{x-1} n - i$

T(n) = 1 + $\frac{(n+n-x+1)n-1}{2}$

T(n) = 1 + $\frac{(n+n-n+1+1)n-1}{2}$

T(n) = 1 + $\frac{(n+2)n-1}{2}$

T(n) = 1 + $\frac{n^2-n+2n-2}{2}$

T(n) = 1 + $\frac{n^2}{2}$ +$\frac{n}{2}$ -1

T(n) = $\frac{n^2}{2}$ +$\frac{n}{2}$

T(n) = Θ(n^2)

d) $\begin{cases} T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn\lg n \\ T(1) = 1 \end{cases}$

Resolução:

T(n) = 2 T$\left(\frac{n}{2}\right)$ + Cn lgn

2T$\left(\frac{n}{2}\right)$ = 2^2 T$\left(\frac{n}{2^2}\right)$ + C 2. $\frac{n}{2}$. lg 2. $\frac{n}{2}$

2^2T$\left(\frac{n}{2^2}\right)$ = 2^3 T$\left(\frac{n}{2^3}\right)$ + C 2^2. $\frac{n}{2^2}$. lg 2^2. $\frac{n}{2^2}$

2^3T$\left(\frac{n}{2^3}\right)$ = 2^4 T$\left(\frac{n}{2^4}\right)$ + C2^3. $\frac{n}{2^3}$. lg 2^3. $\frac{n}{2^3}$

2^{x-1}T$\left(\frac{n}{2^{x-1}}\right)$ = 2^x T$\left(\frac{n}{2^x}\right)$ + C2^{x-1}. $\frac{n}{2^{x-1}}$. lg 2^{x-1}. $\frac{n}{2^{x-1}}$

2^x T$\left(\frac{n}{2^x}\right)$ = 1. 2^x

$\frac{n}{2^x}$ = 1 → n = 2^x → x = lgn

T(n) = 1. 2^x + n.lgn (x-1)
T(n) = 2^x + n.lgn (lgn -1)
T(n) = 2^x + n.$(lgn)^2$ – n.lgn
T(n) = 2^{lgn} + n.$(lgn)^2$ – n.lgn
T(n) = n^{lg2} + n.$(lgn)^2$ – n.lgn
T(n) = n+ n.$(lgn)^2$ – n.lgn
T(n) = $\Theta(\text{n}.(lgn)^2)$

MÉTODO MESTRE

e) $\begin{cases} T(n) = 4T\left(\dfrac{n}{2}\right) + n^3 \\ T(1) = 1 \end{cases}$

Resolução:

a = 4 $\quad n^{\log b^a} = n^{\log 2^4} = n^2$
b = 2
f(n) = n^3

Caso 3: f(n) > n^2

f(n) = $\Omega\left(n^{\log b^{a+\varepsilon}}\right)$
f(n) = $\Omega\left(n^{\mathbf{2}+\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$, para ε>0
f(n) = $\Omega\left(n^{\mathbf{2}+\mathbf{1}}\right)$, para ε>0

Um ε que torna a equação acima verdadeira é ε = 1.

Agora basta encontrar um c<1 para a equação abaixo:

a.f$\left(\frac{n}{b}\right) \leq$ c.f(n) onde c<1

4.f$\left(\frac{n}{2}\right) \leq$ c. n^3

4.$\left(\frac{n}{2}\right)^3 \leq$ c. n^3

C = $\frac{4}{8}$ = $\frac{1}{2}$

C = $\frac{1}{2}$

Portanto T(n) =Θ (f(n))

T(n) = Θ(n^3)

f) O tempo de execução de um algoritmo A é descrito pela recorrência $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$. Um algoritmo concorrente A' tem um tempo de execução $T'(n) = aT'\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$. Qual é o maior valor inteiro para a tal que A' seja assintoticamente mais rápido do que A?

Resolução:

Algoritmo A →T(n) = 7T$\left(\frac{n}{2}\right)$ + n^2

a = 7 $\quad n^{\log b^a} = n^{\log 2^7} = n^{2,8}$
b = 2
f(n) = n^2

Caso 1: f(n) < $n^{2,8}$

f(n) = O $\left(n^{\log b^{a-\varepsilon}}\right)$
f(n) = O $\left(n^{\mathbf{2,8-\varepsilon}}\right)$**,** para ε>0
f(n) = O $\left(n^{\mathbf{2,8-0,8}}\right)$**,** para ε>0

Um ε que torna a equação acima verdadeira é ε = 0,8.

Portanto T(n) =Θ ($n^{\log b^a}$) = Θ ($n^{2,8}$)

T(n) = Θ($n^{2,8}$)

Algoritmo A' →T(n) = aT' $\left(\frac{n}{4}\right)$ + n^2

a = a $\quad n^{\log b^a} = n^{\log 4^a}$ → Supondo o resultado igual a $n^{2,79}$.
b = 4 $\quad$ a = $4^{2,79}$ → a = 48
f(n) = n^2

Caso 1: f(n) < $n^{2,79}$

f(n) = O $\left(n^{\log b^{a-\varepsilon}}\right)$
f(n) = O $\left(n^{\mathbf{2,79-0,79}}\right)$**,** para ε>0

Um ε que torna a equação acima verdadeira é ε = 0,79.

Portanto T(n) =Θ ($n^{\log b^a}$) = Θ ($n^{2,79}$)

T(n) = Θ($n^{2,79}$)

O algoritmo A' é assintoticamente mais rápido que A, devido a possuir menor custo T(n) = Θ($n^{2,79}$). O maior valor inteiro encontrado para a=48.